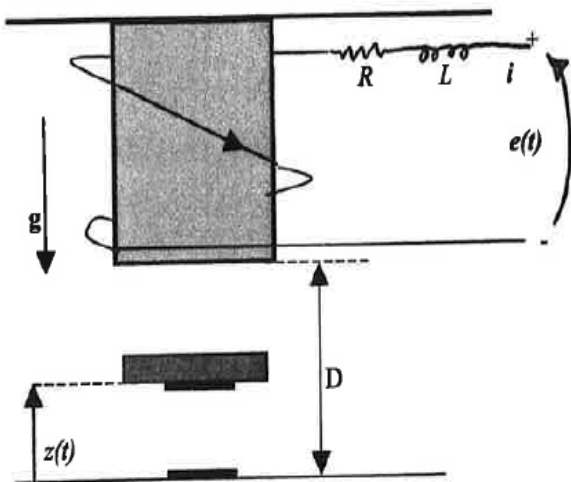


2- (5,0 pts.) Considere um sistema de levitação magnética representado na figura abaixo:



A tensão, $e(t)$, na entrada da bobina do atuador eletromagnético é fornecida pelo circuito de controle. A bobina é modelada por um circuito R, L, conforme a figura.

A força exercida pelo atuador, que é de atração para a corrente $i(t)$ no sentido indicado na figura, tem intensidade dada por:

$$F_m(t) = k \frac{i^2(t)}{(D - z(t))^2}$$

A distância " z " do objeto, de massa " m " e altura desprezível, à base é medida através de um sensor de proximidade capacitivo. A relação entre a distância medida e a tensão correspondente é linearizada através de um circuito eletrônico.

Pede-se:

- (1,5pts) Escreva as equações diferenciais que descrevem o movimento do objeto, em função das forças a que está submetido, e o circuito do atuador eletromagnético;
- (2,0 pts) Linearize o sistema em torno da condição de equilíbrio, onde $z=z_0$, $\dot{z}_0 = 0$, $i=i_0$ e $e=e_0$;
- (1,5 pts) Escreva a equação de estados do sistema, onde a entrada é a variação de tensão $\Delta e(t)$ do circuito do atuador e a saída é a variação de tensão $\Delta v(t) = k_C \Delta z(t)$, fornecida pelo circuito contendo o sensor capacitivo, em relação à condição de equilíbrio.

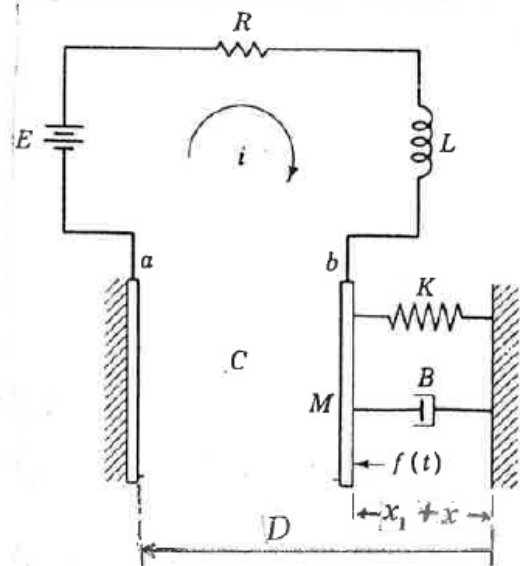
2- (5 pts.). A figura abaixo representa um microfone capacitivo. A placa "a" do capacitor é fixada rigidamente ao invólucro do microfone. As ondas sonoras se chocam sobre a placa "b", de massa " M ", e exercem uma força f . A placa "b" é isolada da moldura através de uma mola de constante elástica " k " e de um amortecimento " b ". A tensão de saída que aparece sobre o resistor, com resistência " R ", reproduz eletricamente as formas das ondas sonoras que incidem sobre a placa "b". O resistor está unido à placa "b" através de um condutor de indutância " L ". O circuito é submetido a uma tensão constante " E ". Na posição de equilíbrio, da placa "b", o capacitor está carregado com uma carga " q^* ". Nesta condição, a mola distende-se x^* , em relação ao seu comprimento natural, e a capacitância vale

$$C^* = \frac{\epsilon A}{(D - x_1)}$$

, onde ϵ é a constante dielétrica do ar e " A ", a área da placa. As dimensões " D " e " x_1 " estão indicadas na figura, sendo que $x_1 = x^* + L$, onde L é o comprimento natural da mola. Além dessas informações, considere a força de atração entre as placas do capacitor:

$$F = \frac{q^2}{2\epsilon A}$$

- (2 pts.) Determine as equações do circuito e do movimento da placa "b";
- (2 pts.) Linearize as equações, expressando " E " em função dos valores de regime permanente das variáveis mencionadas;
- (1 pt.) A equação de estados, onde $f(t)$ é a entrada e a tensão no resistor é a saída.

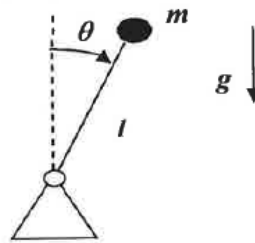


1ª. Questão. Considere o pêndulo invertido, de comprimento l e massa m . As grandezas, a seguir, são expressas no sistema internacional de unidades. Pede-se:

- (1,0 pts.) Represente no espaço de estados o sistema, considerando pequenos ângulos em torno da vertical. Admita entrada nula e saída igual ao ângulo " θ ";
- (1,0pts.) Mostre que o sistema é instável;
- (1,5 pts) Para estabilizar o pêndulo, coloca-se um servo-mecanismo, composto por um motor de corrente contínua acionando a articulação e um circuito de controle, com características:
 - constante de torque igual à constante de força contra-eletromotriz, com valor " k_m ";
 - Resistência de armadura " R " e indutância desprezível;
 - Inércia total do sistema motor-eixo-pêndulo igual a " J ";
 - Razão $\frac{k_m}{RJ} = 1$
 - Tensão de armadura e definida pela lei de controle " $e = K_1(\theta_{ref} - \theta) + K_2\dot{\theta}$ ".

Determine a nova representação no espaço de estados admitindo a entrada como sendo o valor de referência " θ_{ref} ", e a saída, o valor " θ ".

- (1,0 pts) Determine a função de transferência do sistema, sem utilizar a matriz de transição de estados e sua transformada de Laplace.
- (1,5 pts) Determine as constantes K_1 e K_2 de forma a se obter a resposta mais rápida sem sobre-sinal e um tempo de acomodação igual a 0,4s.



2. Um atuador eletromecânico está esquematizado na figura 2. A bobina, tem enrolamento que possui resistência R e indutância L . A força magnética produzida na bobina e que atua na barra é dada por:

$$f = k_B \frac{i^2}{(D - x_a)^2}$$

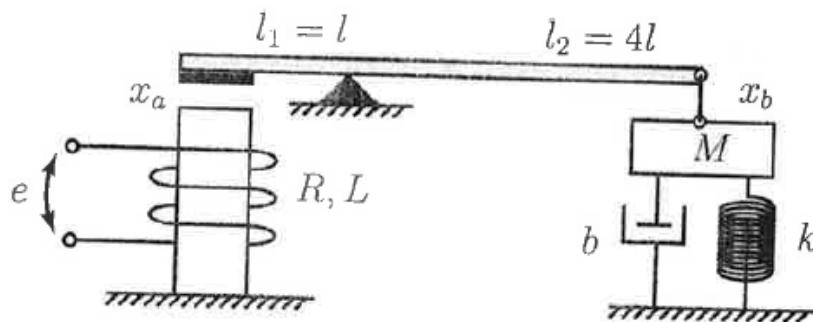


Figura 2: Atuador Eletromecânico.

Os deslocamentos, x_a e x_b , são expressos em relação à posição de equilíbrio, que corresponde à configuração horizontal, quando a mola assume o seu comprimento natural. Note que para a alavanca estar na posição horizontal, a bobina deve estar energizada com uma corrente tal que a força f produzida equilibra a força peso Mg . A barra tem massa desprezível.

Pede-se:

- (0,5 pt) Calcule os valores da tensão na bobina e da corrente na condição de equilíbrio;
- (1,0 pt) Escreva a equação de movimento da massa M , em função da força F que ela recebe diretamente da alavanca.
- (3,5 pts) Monte as equações de estado do sistema linearizado (em torno da posição de equilíbrio), em que a entrada é a variação de tensão na bobina $e(t)$, e a saída é a posição x_b , da extremidade da barra em contato com a massa M .

1ª QUESTÃO (5 PTOS). A figura abaixo representa um servo-acelerômetro pendular. O pêndulo produz um deslocamento da massa m quando acelerado. Tal movimento encontra a oposição de uma restauração elástica de constante k , de um amortecimento aerodinâmico, proporcional à velocidade com constante b , e uma força eletromagnética F_m . Esta última é produzida por uma bobina, e é dada por $F_m = Bi$, onde B é uma constante e i a corrente circulante na bobina. A bobina tem resistência R , e a queda de tensão devido à indutância é desprezível.

A distância x , indicada na figura, é convertida em uma tensão elétrica v , por meio de um sensor capacitivo C . Na configuração horizontal, quando a massa m está em repouso e sem aceleração em relação ao referencial inercial, a posição é x^* , a mola está em seu comprimento natural e a corrente na bobina é nula. A relação entre x e v é dada por $v = K_c/x$, onde K_c é uma constante positiva. Qualquer esforço eletrostático produzido pelo sensor é desprezível.

O bloco 1 transforma v , que é originalmente uma função não-linear de x , em uma tensão $v_L = k_L x$, diretamente proporcional a x . Na saída do bloco 2, tem-se uma tensão $v_B = K_o(v_{ref} - v_L)$, em que K_o é um ganho constante positivo e v_{ref} é uma tensão de referência. O bloco 1 produz v_{ref}^* quando a posição é x^* .

Pede-se:

- (2,0 pts) Projete os circuitos eletrônicos dos blocos “v₁” e “v₂”. Para o bloco “v₁”, suponha que o circuito seja alimentado pela tensão constante v_c .
- (1,5 pts) Represente o sistema através de um diagrama de blocos, onde a entrada é a variação da tensão de referência Δv_{ref} em relação àquela correspondente à posição de equilíbrio x^* , e a saída é a variação do deslocamento Δx da massa m em relação à posição de equilíbrio x^* . Não se esqueça de incluir a perturbação $F_{ext} = ma$.
- (1,5 pts) Calcule o valor em regime permanente da variação Δx , para $\Delta v_{ref} = 0$ e uma aceleração constante “ a ” em relação ao referencial inercial. Para esta situação, determine o valor da corrente de regime na bobina, que é utilizada para se obter a leitura da aceleração pelo sensor.

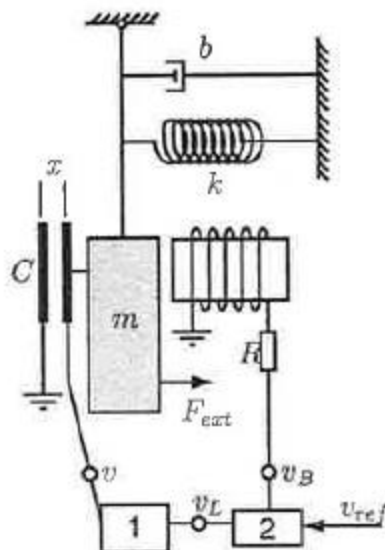


Figura 1: Acelerômetro

5ª Questão. Considere o sistema de controle de uma máquina de usinagem de controle numérico, representado no esquema abaixo. A velocidade de corte desejada é representada através de uma tensão de referência, $V_{yR}(s)$. A mesma é comparada com a tensão gerada por um sensor de velocidade de ganho k_v . Um circuito baseado em um amplificador operacional, implementa um ganho que multiplica a diferença entre as tensões mencionadas. A tensão gerada por este circuito eletrônico alimenta um atuador eletromecânico (solenóide) representado pelo circuito R-L mostrado no esquema. A força gerada pela bobina deste atuador, de indutância L , é diretamente proporcional à corrente que percorre a mesma, ou seja, $f_m = k_m i$. Tal força é responsável pela movimentação da válvula do atuador hidráulico representado na figura 1, onde admite-se que o óleo é incompressível e não haja vazamentos. O sistema é regulado de forma que a mola de constante K_S permanece em seu comprimento natural, quando a válvula permanece deslocada X_0 , posição que corresponde à velocidade de corte desejada, y_0 . Nesta condição, a tensão gerada pelo sensor de velocidade iguala a tensão de referência. A carga é representada pelo conjunto pistão hidráulico-ferramenta, de massa m_L , que é submetida à força de atrito proporcional à velocidade da ferramenta em relação à peça de trabalho (suposta em repouso), de acordo com a constante b . Admite-se a operação do sistema em torno da velocidade de corte desejada. Pede-se:

- Represente o circuito eletrônico que produz a tensão de alimentação do atuador eletromecânico. Calcule a relação entre seus elementos de forma a obter um valor K_I para o ganho representado no esquema. Como você implementaria o sensor de velocidade utilizando um potenciômetro e componentes eletrônicos?
- A partir do que foi exposto, construa o diagrama de blocos do sistema descrito, identificando as respectivas funções de transferência, que devem ser descritas em termos da variável de Laplace;
- Admita desprezíveis a massa da válvula e a constante de tempo do atuador hidráulico. Inclua um sinal de perturbação, $d(s)$, antes do sistema atuador hidráulico-carga, no diagrama de blocos do item anterior. Calcule as funções de transferência que relacionam a variação da velocidade de corte da ferramenta $\Delta v_y(s)$ com a variação na tensão de referência $\Delta V_{yR}(s)$ e com a perturbação $d(s)$.

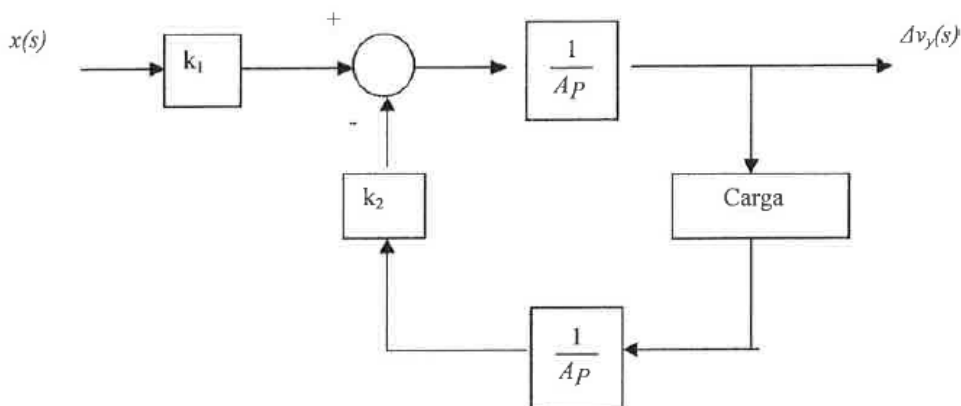
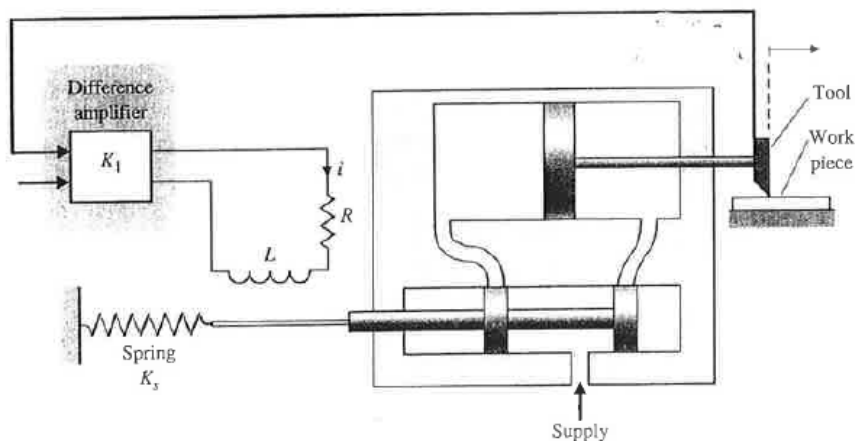


Figura 1. Modelo linear do atuador hidráulico ($x(s)$ é a variação do deslocamento da válvula em relação a X_0).



Lista 2 - Sis Din

1.

a) Equações diferenciais:

$$(i) \text{ Kirchhoff: } e(t) = Ri + L \frac{di}{dt}$$

$$(ii) \text{ Newton: } k \frac{i^2}{(D-z)^2} - mg = m \frac{d^2 z}{dt^2}$$

Então:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} i + \frac{1}{L} e(t) \\ \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{k}{m} \frac{i^2}{(D-z)^2} - g \end{array} \right.$$

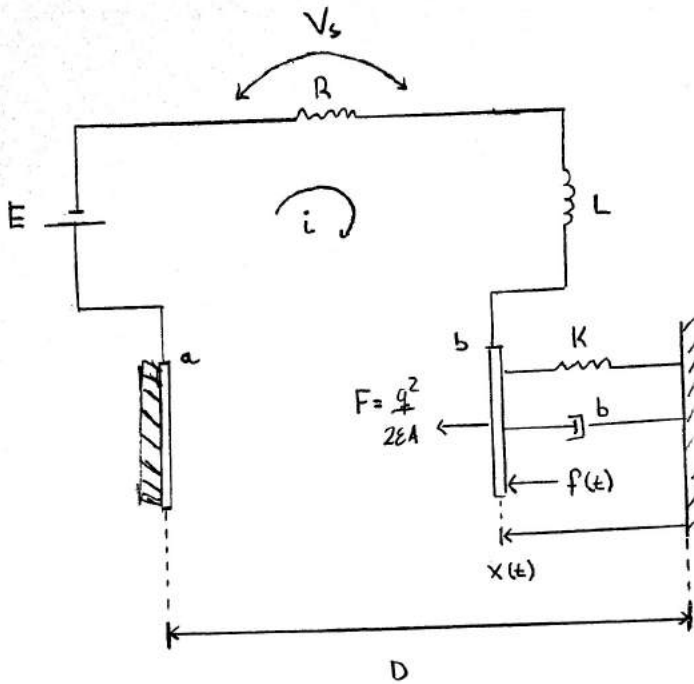
b) Linearização:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \left(\frac{di}{dt} \right) = -\frac{R}{L} \Delta i + \frac{1}{L} \Delta e \\ \Delta \left(\frac{d^2 z}{dt^2} \right) = \frac{k}{m} \left(\frac{2i_0}{(D-z_0)^2} \Delta i + \frac{2i_0}{(D-z_0)^3} \Delta z \right) = \frac{2ki_0}{m(D-z_0)^2} \Delta i + \frac{2ki_0}{m(D-z_0)^3} \Delta z \end{array} \right.$$

c) Espaço de Estados:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta i \\ \Delta z \\ \Delta \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2ki_0}{m(D-z_0)^2} & \frac{2ki_0}{m(D-z_0)^3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta i \\ \Delta z \\ \Delta \dot{z} \end{bmatrix} + \Delta e \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Delta V = [0 \quad k_c \quad 0] \begin{bmatrix} \Delta i \\ \Delta z \\ \Delta \dot{z} \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

2.



→ No equilíbrio:

$$(i) \quad x(t) = x_L = x^* + l$$

$$(ii) \quad \text{Capacitor: } \begin{cases} q = q^* \\ C = C^* = \frac{\epsilon A}{(D-x_L)} \end{cases}$$

a) (i) Circuito: usando a lei de Kirchhoff

$$E = Ri + L \frac{di}{dt} + V_c$$

$$V_c = \frac{q}{C} = q \frac{(D-x)}{\epsilon A}$$

$$E = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + q(t) \cdot \frac{(D-x(t))}{\epsilon A},$$

$$\text{sendo que } i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

(ii) Placa "b": aplicando a 2ª lei de Newton

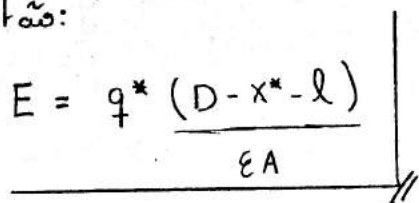
$$\frac{q^2(t)}{2\epsilon A} + f(t) - k(x(t)-l) - b \frac{dx(t)}{dt} = m \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

Ou seja:

$$\begin{cases} \ddot{q} = -\frac{R}{L} \dot{q} - \frac{1}{\epsilon A L} q(D-x) + \frac{1}{L} E \\ \ddot{x} = \frac{1}{2m\epsilon A} q^2 - \frac{k}{m}(x-l) - \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{1}{m} f \end{cases}$$

b) Na condição de equilíbrio: $x = x^* + l$ e $q^* = q^* \Rightarrow \dot{q} = \ddot{q} = 0$

Então:

$$E = \frac{q^* (D - x^* - l)}{\epsilon A}$$


As equações diferenciais podem ser escritas como o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} q = \dot{q} = - \left(\frac{D}{\epsilon A L} q - \frac{q x}{\epsilon A L} \right) \\ \frac{d}{dt} \dot{q} = - \frac{R}{L} \dot{q} - \frac{1}{\epsilon A L} q (D - x) + \frac{1}{L} E \\ \frac{d}{dt} x = \dot{x} = F_3 - \left(\frac{k x}{m} - \frac{k l}{m} \right) \\ \frac{d}{dt} \dot{x} = \frac{1}{2m\epsilon A} q^2 - \frac{k}{m} (x - l) - \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{1}{m} F \end{cases}$$

Linearizando em torno do equilíbrio:

$$(i) \quad \frac{d}{dt} \Delta q = \Delta \dot{q}$$

$$(ii) \quad \frac{d}{dt} \Delta \dot{q} = - \frac{R}{L} \Delta \dot{q} - \frac{(D - l - x^*)}{\epsilon A L} \Delta q + \frac{q^*}{\epsilon A L} \Delta x$$

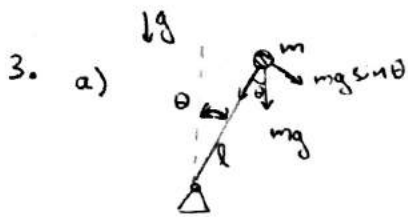
$$(iii) \quad \frac{d}{dt} \Delta x = \Delta \dot{x}$$

$$(iv) \quad \frac{d}{dt} \Delta \dot{x} = \frac{q^*}{m\epsilon A} \Delta q - \frac{k}{m} \Delta x - \frac{b}{m} \Delta \dot{x} + \frac{1}{m} \Delta F$$

c) Equações de Estados:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta q \\ \Delta \dot{q} \\ \Delta x \\ \Delta \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{x^* + l - D}{\epsilon A L} & -\frac{R}{L} & \frac{q^*}{\epsilon A L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{q^*}{m \epsilon A} & 0 & -\frac{k}{m} & -\frac{k}{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q \\ \Delta \dot{q} \\ \Delta x \\ \Delta \dot{x} \end{bmatrix} + f(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/m \end{bmatrix}$$

$$\Delta V_a = [0 \quad R \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \Delta q \\ \Delta \dot{q} \\ \Delta x \\ \Delta \dot{x} \end{bmatrix} \quad \text{Obs: } \Delta V_R = R \Delta i = R \cdot \Delta \dot{q}$$



Da 2ª lei de Newton: ($\delta = I \alpha$)

$$-mg \sin \theta = ml^2 \ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} - \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

Para pequenos ângulos: $\sin \theta \approx \theta \Rightarrow \ddot{\theta} - \frac{g}{l} \theta = 0$

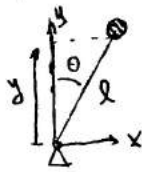
Fazendo: $\omega = \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{g}{l} \theta$

Então

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g/l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} \\ y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} \end{cases}$$

b) Estabilidade:

(i) Critério da Energia Potencial:



$$V = mgy = mgl \cos \theta$$

$$\frac{dV}{d\theta} = -mgl \sin \theta \Rightarrow \frac{d^2V}{d\theta^2} = -mgl \cos \theta$$

Assim, como $\theta = 0$ é uma config de eq. e $\left. \frac{d^2V}{d\theta^2} \right|_{\theta=0} = -mgl < 0 \Rightarrow$ equilíbrio é instável.

(ii) Resolvendo a equação: p/ $\theta_0 = 0$ (eq.) e $w(\theta) = w_0$

$$\mathcal{L}[\ddot{\theta} = \frac{g}{l} \theta] \Rightarrow s^2 \Theta(s) + w_0 = \frac{g}{l} \Theta(s) \Rightarrow \Theta(s) [s^2 - g/l] = -w_0$$

$$\Rightarrow \Theta(s) = \frac{-w_0}{s^2 - g/l} = \frac{-w_0}{(s+\Omega)(s-\Omega)} = \frac{a_1}{s+\Omega} + \frac{a_2}{s-\Omega}$$

$$a_1 = \left[\frac{-w_0}{(s+\Omega)(s-\Omega)} \cdot (s+\Omega) \right]_{s=-\Omega} = \frac{-w_0}{-2\Omega} = \frac{w_0}{2\Omega}$$

$$a_2 = -\frac{w_0}{2\Omega}$$

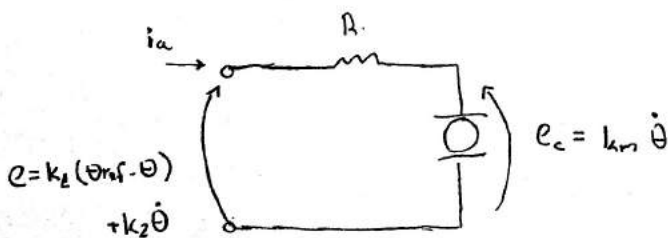
$$\therefore \theta(t) = \frac{w_0}{2\Omega} (e^{-\Omega t} + e^{\Omega t})$$

→ Isso explode

p/ infinito:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = +\infty$$

c) Circuito do servo-mecanismo:



Da lei de Kirchhoff:

$$k_L(\theta_{ref} - \theta) + k_2 \dot{\theta} = Ri_a + k_m \dot{\theta} \Rightarrow$$

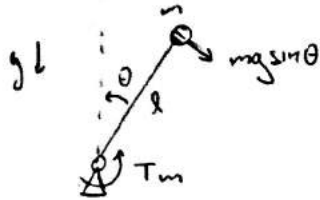
$$\Rightarrow i_a = \frac{1}{R} (k_L(\theta_{ref} - \theta) + (k_2 - k_m) \dot{\theta}) \quad (*)$$

Além disso, o torque do motor é dado por:

$$T_m = k_T i_a \stackrel{(1)}{=} \frac{k_m}{R} (k_L(\theta_{ref} - \theta) + (k_2 - k_m)\dot{\theta}) \quad (2)$$

$k_T = k_m$

A parte mecânica fornece:



$$T_m - mgl \sin \theta = -J \ddot{\theta}, \text{ que para } \theta \ll 1 \text{ fica:}$$

$$T_m - mgl \theta = J \ddot{\theta} \quad (3)$$

Substituindo (2) em (3):

$$\frac{k_m k_2}{R} \theta_{ref} - \frac{k_m k_1}{R} \theta + \frac{k_m (k_2 - k_m)}{R} \dot{\theta} - mgl \theta = J \ddot{\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\ddot{\theta} = \frac{k_m (k_2 - k_m)}{R J} \dot{\theta} - \left(\frac{k_m k_1}{R J} + \frac{mgl}{J} \right) \theta + \frac{k_m k_1}{R J} \theta_{ref}$$

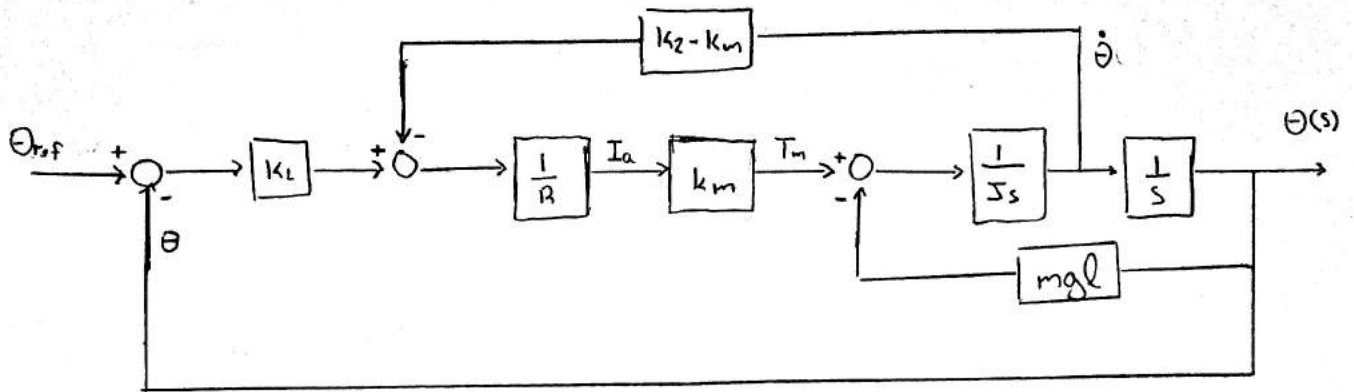
Do enunciado, $\frac{k_m}{R J} = 1$:

$$\ddot{\theta} = (k_2 - k_m) \dot{\theta} - \left(k_1 + \frac{mgl}{J} \right) \theta + k_1 \theta_{ref} \quad (5)$$

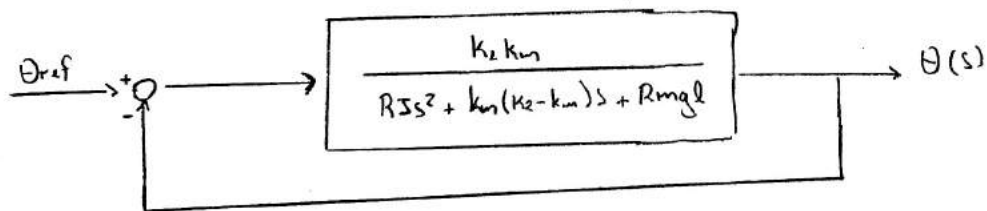
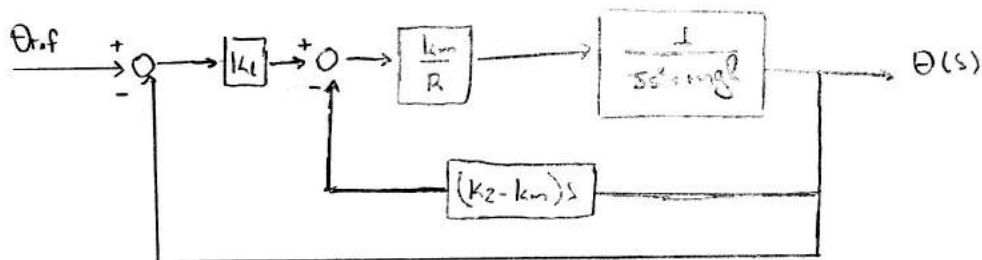
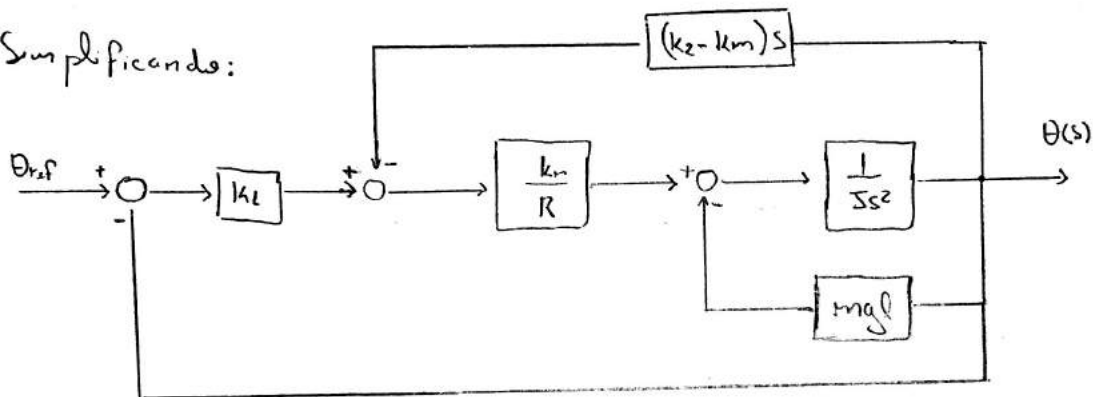
Logo, a representação no espaço de estados fica:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_2 - k_m & -k_1 - \frac{mgl}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ w \end{bmatrix} + \theta_{ref} \begin{bmatrix} 0 \\ k_1 \end{bmatrix} \\ y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \theta \\ w \end{bmatrix} \end{cases}$$

d) Sobre o diagrama de blocos:



Simplificando:



Então, finalizando as contas:

$$\frac{\Theta(s)}{\Theta_{ref}(s)} = \frac{k_L}{s^2 + (k_2 - k_m)s + \frac{mgl}{R} + k_L}$$

e) Um sistema de 2º ordem genérico tem como ft.:

$$G(s) = \frac{K \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$$

Então:

$$\omega_n^2 = \frac{mg\ell}{J} + k_1$$

$$2\zeta \omega_n = k_2 - k_m \Rightarrow 2\sqrt{\frac{mg\ell}{J} + k_1} \zeta = k_2 - k_m \Rightarrow \zeta = \frac{k_2 - k_m}{2\sqrt{\frac{mg\ell}{J} + k_1}}$$

(i) Para que seja a ^{resp.} mais rápida: $\zeta = 1$

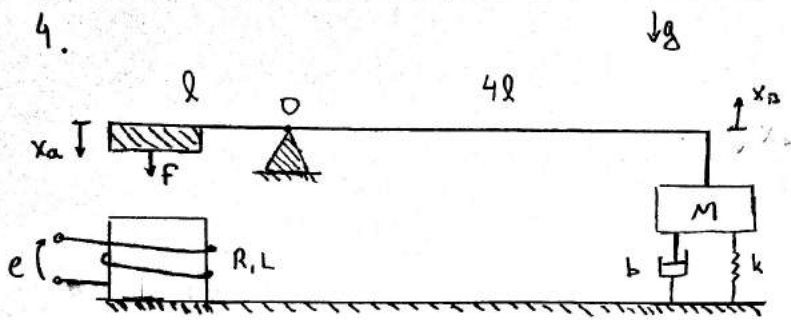
(ii) Para que $\text{tamponamento} = 0,4$: $\frac{4}{\omega_n \zeta} = 0,4 \Rightarrow \omega_n \zeta = 10$

Assim:

$$\frac{k_2 - k_m}{2} = 10 \Rightarrow \boxed{k_2 = 20 + k_m}$$

$$\left(\frac{k_2 - k_m}{2}\right) \cdot \left(\frac{mg\ell}{J} + k_1\right)^{-1/2} = 1 \Rightarrow \left(\frac{mg\ell}{J} + k_1\right)^{1/2} = \frac{k_2 - k_m}{2} = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{k_1 = 100 - \frac{mg\ell}{J}}$$



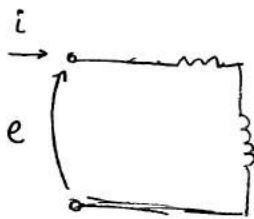
$$f = k_B \frac{i^2}{(D - x_a)^2}$$

a) No equilíbrio: $x_a = 0 \Rightarrow f = k_B \frac{i^2}{D^2}$ (1)

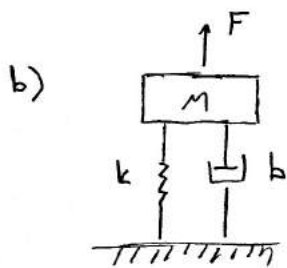
Então: $f \cdot l = 4l M g \Rightarrow f = 4Mg$ (2) (eq. na barra)

De (1) \rightarrow (2): $k_B \frac{i^2}{D^2} = 4Mg \Rightarrow i = 2D \sqrt{\frac{Mg}{k_B}}$

O circuito da bobina i :



$$e = Ri + L \frac{di}{dt} \Rightarrow e = 2RD \sqrt{\frac{Mg}{k_B}}$$



2ª Lei de Newton fornece:

$$M \ddot{x}_b = -kx_b - b\dot{x}_b + F$$

$$\ddot{x}_b = -\frac{k}{M} x_b - \frac{b}{M} \dot{x}_b + \frac{1}{M} F$$

6) Nota:

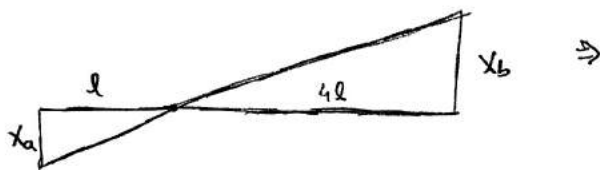
$$e(t) = Ri + L \frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} i + \frac{1}{L} e(t) \quad (1)$$

Massa + Barra

Barra tem massa desprezível: $p \cdot l = F \cdot 4l \Rightarrow F = \frac{1}{4} p = \frac{k_b \cdot i^2}{4(D-x_a)^2}$

Massa: $\ddot{X}_b = -\frac{k}{M} X_b - \frac{b}{M} \dot{X}_b + \frac{k_b \cdot i^2}{4M(D-x_a)^2} \quad (2)$

Mas:



Por semelhança de triângulos:

$$\frac{x_a}{l} = \frac{x_b}{4l} \Rightarrow x_a = \frac{x_b}{4} \quad (3)$$

Substituindo (3) em (2):

$$\ddot{X}_b = -\frac{k}{M} X_b - \frac{b}{M} \dot{X}_b + \frac{k_b \cdot x_a^2}{4M(D-x_b)^2}$$

Tem-se, então:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} i + \frac{1}{L} e(t) = f_1 \\ \frac{dx_b}{dt} = v_b = f_2 \\ \frac{dv_b}{dt} = -\frac{4k_b \cdot i^2}{M(D-x_b)^2} - \frac{k}{M} x_b - \frac{b}{M} v_b = f_3 \end{array} \right.$$

Na condição de equilíbrio: $\left\{ \begin{array}{l} i_0 = 2D \sqrt{\frac{Mg}{k_b}} \quad e \quad e_0 = 2RD \sqrt{\frac{Mg}{k_b}} \\ x_{b0} = 0 \quad (\text{posição horizontal}) \end{array} \right.$

Linearizando em torno do equilíbrio:

$$(i) \quad \left. \frac{\partial f_1}{\partial i} \right|_{eq} = -\frac{R}{L} \quad ; \quad \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_b} \right|_{eq} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial v_b} \right|_{eq} = 0 \quad e \quad \left. \frac{\partial f_1}{\partial e} \right|_{eq} = \frac{1}{L}$$

$$\text{Então: } \frac{d \Delta i}{dt} = -\frac{R}{L} \Delta i + \frac{1}{L} \Delta e$$

$$(ii) \quad \frac{\partial f_2}{\partial i} = \frac{\partial f_2}{\partial x_b} = \frac{\partial f_2}{\partial e} = 0 \quad e \quad \left. \frac{\partial f_2}{\partial v_b} \right|_{eq} = L \Rightarrow \frac{d \Delta x_b}{dt} = \Delta v_b$$

$$(iii) \quad \left. \frac{\partial f_3}{\partial i} \right|_{eq} = \frac{8k_b}{M} \cdot \frac{i_0}{(4D - x_{b0})^2} = \frac{8k_b}{M} \cdot \frac{2D(Mg/k_b)^{1/2}}{16D^2} = \frac{k_b}{MD} \cdot \sqrt{\frac{Mg}{k_b}} = \frac{1}{D} \sqrt{\frac{k_b g}{M}}$$

$$\left. \frac{\partial f_3}{\partial x_b} \right|_{eq} = + \frac{8k_b}{M} \cdot \frac{i_0^2}{(4D - x_{b0})^3} = \frac{8k_b}{M} \cdot \frac{4D^2 \frac{Mg}{k_b}}{4^3 D^3} = \frac{g}{2D} - \frac{k}{M}$$

$$\left. \frac{\partial f_3}{\partial v_b} \right|_{eq} = -\frac{b}{M}$$

$$\text{Então: } \frac{d \Delta v_b}{dt} = \frac{1}{D} \sqrt{\frac{k_b g}{M}} \Delta i + \left(\frac{g}{2D} - \frac{k}{M} \right) \Delta x_b - \frac{b}{M} \Delta v_b$$

Em espaço de estados:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta i \\ \Delta x_b \\ \Delta v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{D} \sqrt{\frac{k_b g}{M}} & \frac{g}{2D} - \frac{k}{M} & -\frac{b}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta i \\ \Delta x_b \\ \Delta v_b \end{bmatrix} + e^{(t)} \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \\ \Delta y = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} \Delta i \\ \Delta x_b \\ \Delta v_b \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

S. b)

(i) Pêndulo:

$$m \ddot{x} = -kx - b\dot{x} - Bi + ma \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}\dot{x} - \frac{B}{m}i + a \quad (1)$$

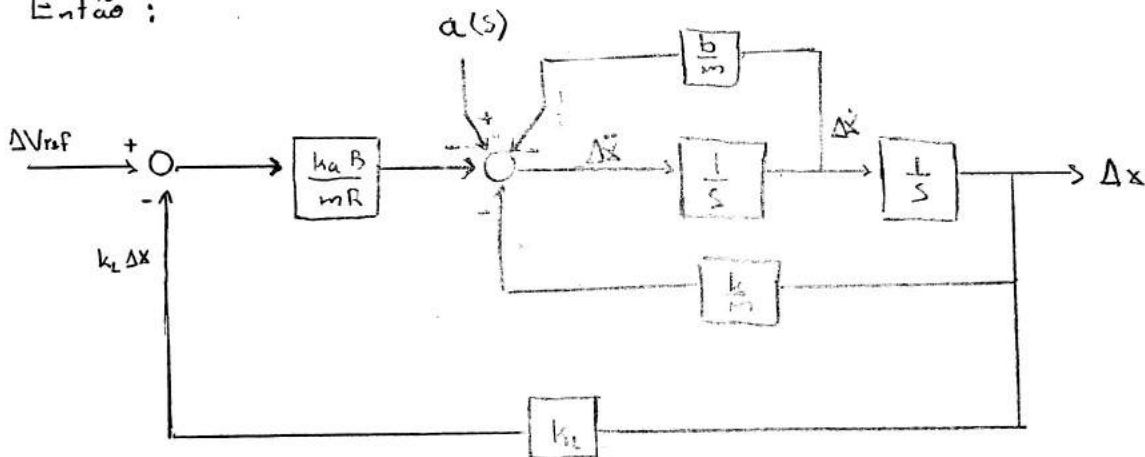
(ii) Circuito:

$$V_B = Ri$$

$$V_B = k_a (V_{ref} - V_L) = k_a (V_{ref} - k_L x)$$

$$\left. \begin{array}{l} V_B = Ri \\ V_B = k_a (V_{ref} - V_L) = k_a (V_{ref} - k_L x) \end{array} \right\} i = \frac{k_a}{R} (V_{ref} - k_L x) \quad (2)$$

Então:



$$\mathcal{L}[a] = a \mathcal{L}[1(t)]$$

↓

$$c) \quad s^2 \Delta X(s) = -\frac{k}{m} \Delta X(s) - \frac{b}{m} s \Delta X(s) - \frac{k_a B}{mR} (\Delta V_{ref} - k_L \Delta X(s)) + \frac{a}{s}$$

$$\Delta X(s) \left[s^2 + \frac{b}{m} s + \frac{k}{m} - \frac{k_L k_a B}{mR} \right] = \frac{a}{s}$$

$$\Delta X(s) = \frac{a}{s \left(s^2 + \frac{b}{m} s + \frac{k}{m} - \frac{k_L k_a B}{mR} \right)}$$

O valor em regime estacionário é dado por:

$$\Delta X_e = \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta X(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Delta X(s) \quad (\text{Teorema do Valor Final}).$$

Então:

$$\Delta X_e = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{a}{s(s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m} - \frac{k_1 k_a B}{mR})}$$

$$\Delta X_e = \frac{a}{\frac{k}{m} - \frac{k_1 k_a B}{mR}} = \frac{mRa}{Rk - k_1 k_a B}$$

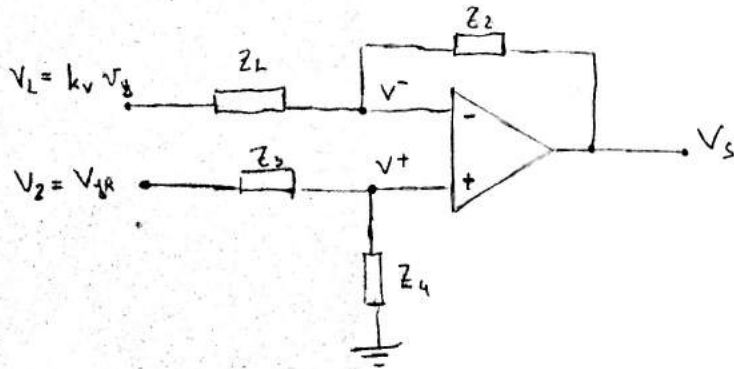
Colocando $\Delta V_{rif} = 0$ e ΔX_e na eq. (2):

$$\Delta i_e = \frac{k_a k_i \Delta X_e}{R} \Rightarrow \Delta i_e = \frac{k_1 k_a m a}{Rk - k_1 k_a B}$$

6.

a) O circuito eletrônico que alimenta o atuador recebe a tensão de referência V_{gr} e comparada com a tensão $k_v v_g$ que vem do sensor, devolvendo $V_s = k_L (V_{gr} - k_v v_g)$

Um possível circuito é:



$$(1) \frac{V_L - V^-}{Z_L} = \frac{V^- - V_S}{Z_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V^- = \frac{Z_2 V_1 + Z_L V_S}{Z_L + Z_2}$$

$$(2) \frac{V_2 - V^+}{Z_3} = \frac{V^+}{Z_4} \Rightarrow V^+ = \frac{Z_4}{Z_3 + Z_4} V_2$$

Se o Amp Op ideal: $V^- \approx V^+ \Rightarrow \frac{Z_2 V_1 + Z_L V_S}{Z_L + Z_2} = \frac{Z_4}{Z_3 + Z_4} V_2$

Rearranjando:

$$V_S = \frac{(Z_L + Z_2)}{(Z_3 + Z_4)} \cdot \frac{Z_4}{Z_L} V_2 - \frac{Z_2}{Z_L} V_1$$

Para que a saída seja da forma $V_S = k_L (V_2 - V_1)$:

$$\frac{(Z_L + Z_2)}{(Z_3 + Z_4)} \cdot \frac{Z_4}{Z_L} = \frac{Z_2}{Z_L} = k_L$$

Da 1ª igualdade

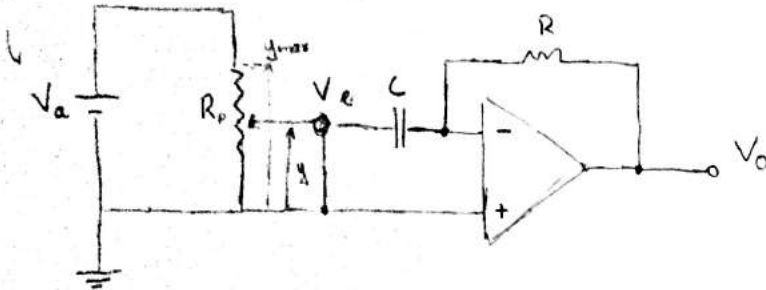
$$\frac{Z_L + Z_2}{Z_3 + Z_4} = \frac{Z_2}{Z_4} \Rightarrow Z_4 Z_L + Z_4 Z_2 = Z_2 Z_3 + Z_2 Z_4$$

$$\Rightarrow Z_4 Z_L = Z_2 Z_3 \Rightarrow \frac{Z_2}{Z_L} = \frac{Z_4}{Z_3}$$

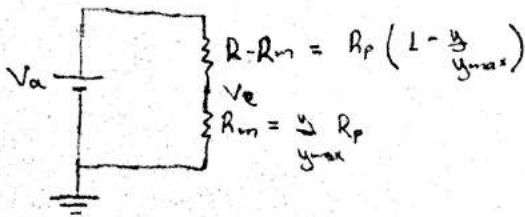
Assim: $\boxed{\frac{Z_2}{Z_L} = \frac{Z_4}{Z_3} = k_L}$ garante $V_S = k_L (V_{gr} - k_v v_g)$

Para o sensor de velocidade: seria possível associar um sensor de posição com um circuito derivativo

Tensão de



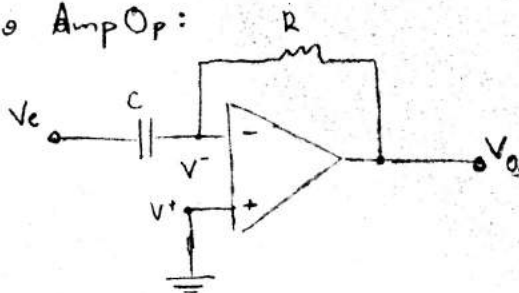
No circuito com o potenciômetro; sendo $R_m = \frac{y}{y_{max}} R_p$



$$\Rightarrow \frac{V_a - V_e}{R - R_m} = \frac{V_e}{R_m} \Rightarrow V_e = \frac{R_m}{R_p} V_a$$

$$\Rightarrow V_e = \frac{y}{y_{max}} \cdot \frac{R_p}{R_p} V_a = k_p y, \text{ com } k_p = \frac{V_a}{y_{max}}$$

No AmpOp:



$$\frac{V_e(s) - V^-(s)}{1/Cs} = \frac{V^-(s) - V_o(s)}{R}$$

$$V^- \approx V^+ = 0$$

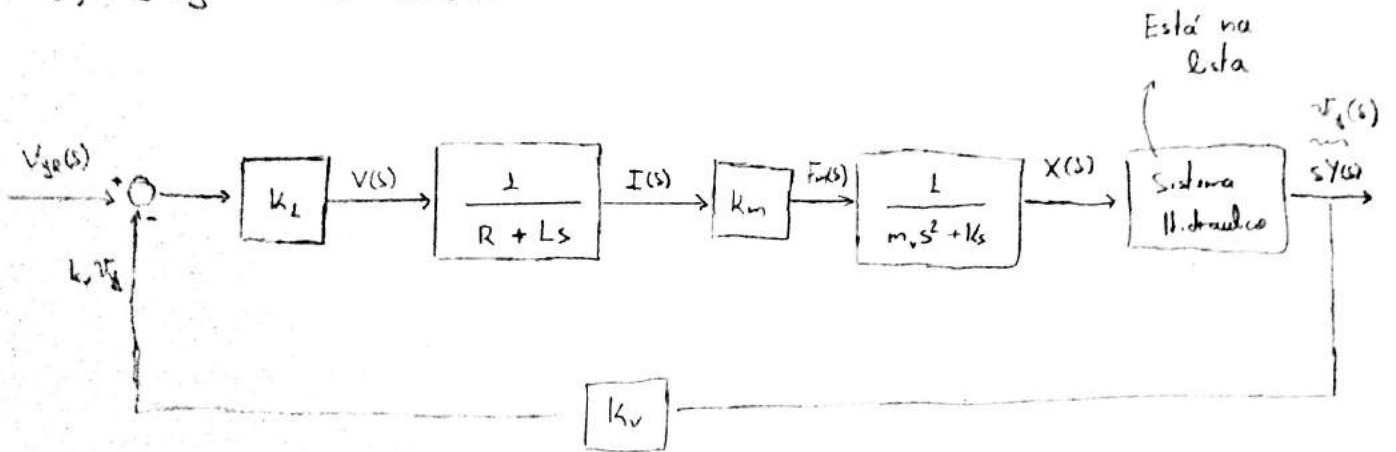
Então:

$$V_o(s) = -RC s V_e(s) \Rightarrow V_o = -RC \frac{dV_e}{dt} = -RC \frac{V_a}{y_{max}} \frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow V_o = - \underbrace{\frac{V_a \cdot RC}{y_{max}}}_{k_v} \cdot \dot{y} \Rightarrow$$

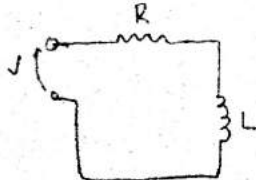
$$V_o = k_v \dot{y} = k_v v_y$$

b) Diagrama de Blocos:

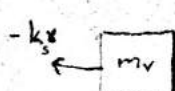


Equações:

(i) Eletrônica: $V(s) = k_L (V_{gd}(s) - k_v v_y(s))$

(ii) Circuito:  $V(s) = RI(s) + Ls I(s)$
 $I(s) = \frac{V(s)}{R + Ls}$

(iii) Válvula do atuador hidráulico:

 $F_v = k_m i \Rightarrow k_m i - k_s x = m_v \ddot{x}$
 $k_m I(s) - k_s X(s) = m_v s^2 X(s)$

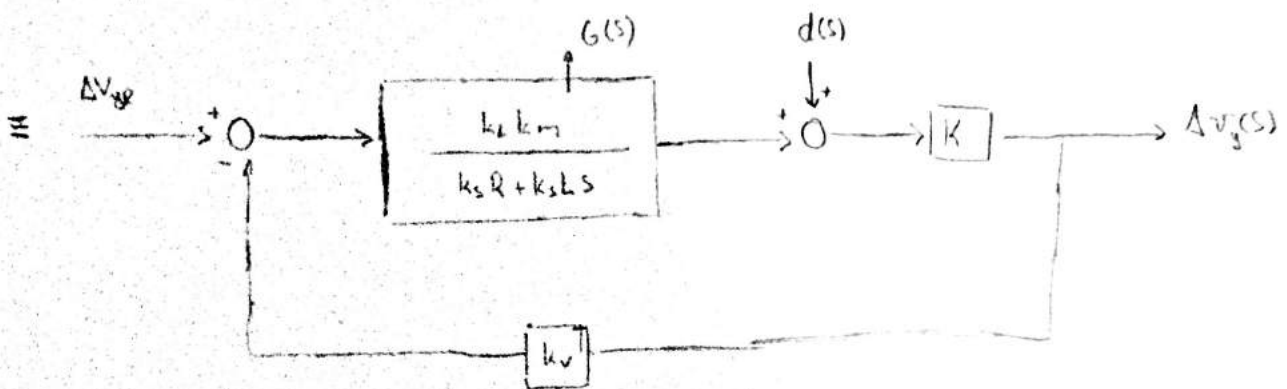
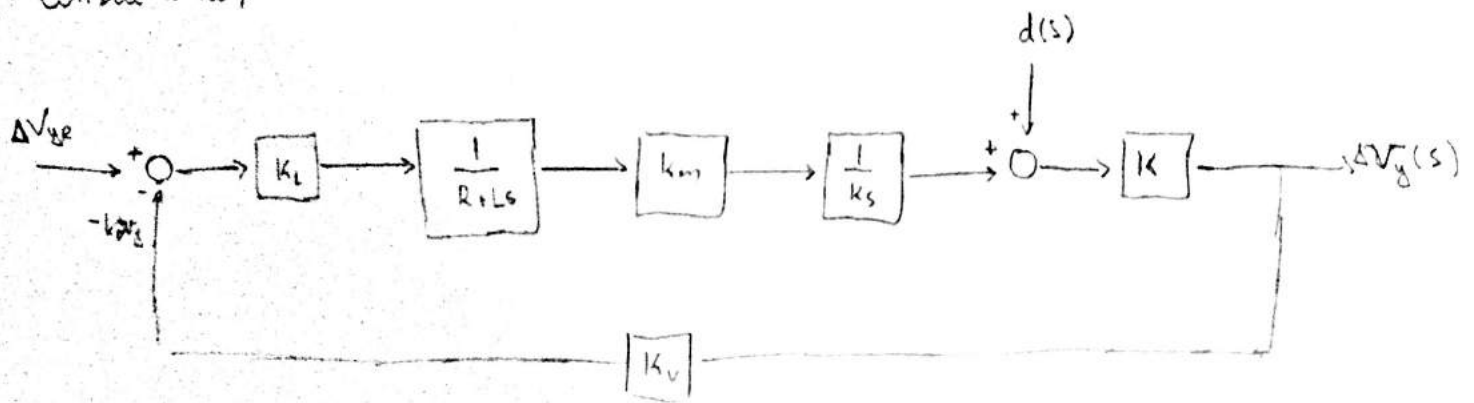
$k_m I(s) = X(s) [m_v s^2 + k_s]$

c) O sistema hidráulico tem como função de transferência:

$X(s) \rightarrow \left[\frac{K}{s(\beta s + L)} \right] \rightarrow Y(s)$, com $K = \frac{k_L A_p}{b k_2 + A_p^2}$

Se $\beta \approx 0$: $\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s} \Rightarrow s Y(s) = v_y(s) = K X(s)$

Considerando, também $m_v \approx 0$ e incluindo $d(s)$:



Então:

$$\left[(\Delta V_{ge} - k_v \Delta v_g(s)) \cdot G(s) + d(s) \right] K = \Delta v_g(s)$$

$$K G(s) \cdot \Delta V_{ge} + k d(s) = (k_v K G(s) + L) \Delta v_g(s)$$

$$\Delta v_g(s) = \frac{k G(s)}{1 + k_v K G(s)} \Delta V_{ge} + \frac{k}{1 + k_v K G(s)} d(s)$$